Kodovanje u prisustvu šuma

Milan M.Milosavljević

Cilj poglavlja

Osnovu poglavlja čini „Teorema o kodovanju u prisustvu šuma“ (Noisy Coding Theorem), koja utvrdjuje uslove pod kojima je moguć pouzdan prenos informacija.

Nakon ovog poglavlja znaćemo

- Koja je maksimalna brzina pouzdanog prenosa po kanalu sa šumom uz upotrebu kodova za ispravljanje grešaka
- Koja je maksimalna količina grešaka koja se čini kada se informacije prenose brzinom većom od maksimalne

Kod ponavljanja

- Daćemo primer jednog veoma jednostavnog i naivnog koda za ispravljanje grešaka. Primer prevashodno služi da nam pokaže mogućnost konstrukcije daleko efikasnijih kodova.
- Binarni kod ponavljanja R_k jednostavno svaki ulazni binarni simbol ponavlja n=2k+1 put, k>0. Kod R_1 je opisan u primeru 4.2. Razmatraćemo samo neparan broj ponavljanja, budući da se takvi kodovi dekoduju na osnovu većinske logike.
- U ovoj klasi kodova verovatnoća pogrešnog dekodovanja je jednaka verovatnoći da se dese najmanje k+1 grešaka u razmatranom bloku podataka.
- Razmotrimo situaciju u kojoj se ovaj kod koristi za komuniciranje po BSC kanalu. Broj grešaka je raspodeljen po binomijalnoj raspodeli sa parametrima (n,p). Očekivana vrednostovih grešaka je np.

Kod ponavljanja

- Za $p<0.5$, očekivani broj grešaka je manji od $k+0.5$, što znači da verovatnoća da se desi najmanje $k+1$ greška unutar jedne kodne reči teži nuli kada k (a samim tim i n) teži beskonačnosti.
- Drugim rečima verovatnoća pogrešnog dekodovanja teži nuli, kada povećavamo broj ponavljanja (a samim tim i dužine kodnih reči)
- Prema tome, u stanju smo da kompenzujemo gubitke usled šumova na kanalu do proizvoljne mere ukoliko primenimo dovoljno velik broj ponavljanja.
- Medjutim cena koja se za to plaća je efikasnost. Brzina takvog koda je $\frac{1}{n}$, i teži nuli kada se n povećava. Za veliko n, to je neprihvatljivo niska brzina prenosa.

Kod ponavljanja

Control Question 41

On a BSC with error probability p, we plan to use the repetition code $\mathcal{R}_1$ consisting of tripling each symbol of the messages. Decoding is done according to the majority in the received block.

What is, as a function of p, the output bit error probability P_b for such a communication system?

1. $p^2 - p^3$
2. p^2
3. $3p^2 - 2p^3$
4. $2p^2 - 3p^3$
5. p^3

Teorema o kodovanju u prisustvu šuma (converse part)

Teorema 4.3 *(Converse Part of Noisy Coding Theorem)*

Ukoliko je binarni simetrični izvor BSS brzine R ulaz u DMC bez povratne sprege kapaciteta C i ukoliko je R > C, tada je verovatnoća greške P_b na izlazu kanala data sa

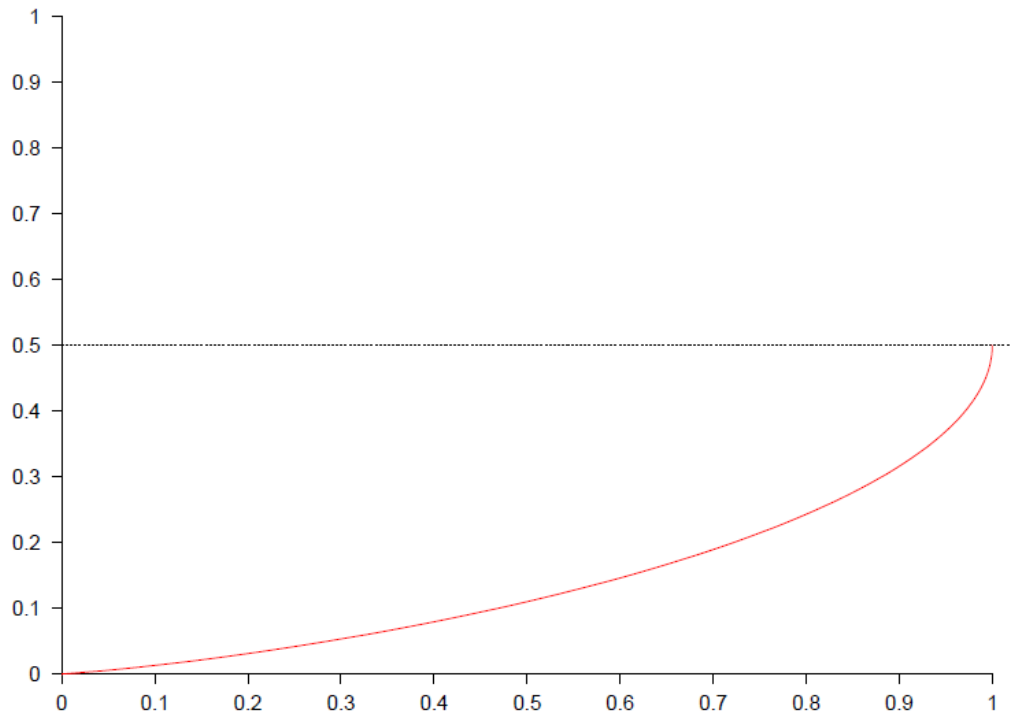
$$P_b \geq \widetilde{\mathrm{h}}^{-1}\left(1 - \frac{C}{R}\right), \tag{4.24}$$

gde je

$$\widetilde{\mathrm{h}}^{-1}(x) = \min\{p : -p\log(p) - (1-p)\log(1-p) = x\}.$$

Teorema o kodovanju u prisustvu šuma (converse part)

- $\tilde{h}^{-1}$ označava inverznu binarnu entropijsku funkciju, pri čemu je min uveden zbog jedinstvenosti inverzne funkcije.



Teorema o kodovanju u prisustvu šuma (converse part)

Važna posledica ove teoreme je da kad god važi R > C, postoji pozitivna donja granica za verovatnoću greške P_b koju ni jedan sistem kodovanja, bez obzira koliko on bio kompleksan ne može prevazići.

Primer 4.9

Neka je kapacitet jednog DMC, C=0.25 bita za prenos poruka BSS izvora. Ako se prenos vrši brzinom R=0.5, tada nam (4.24) daje grešku najmanje 11%, budući da je

$$P_b \geq \widetilde{\mathrm{h}}^{-1}\left(1-\frac{1}{2}\right) = .11.$$

To znači da će najmanje 11% bita biti pogrešno dekodovano bez obzira kakav kod za ispravljanje grešaka primenili.

Teorema o kodovanju u prisustvu šuma (converse part)

- Kako stoji stvar sa DMC sa povratnom spregom?
- Pokazuje se da i u slučaju DMC sa povratnom spregom, nejednakost (4.24) važi.
- Ova činjenica se izražava stavom da povratna sprega ne može da poveća kapacitet DMC.
- Medjutim to ne znači da povratna sprega nema značaja. Kada se vrši prenos na brzinama $R < C$, upotreba povratne sprege po pravilu pojednostavljuje kodovanje i dekodovanje i omogućava postizanje željene greške dekodovanja.

Teorema o kodovanju u prisustvu šuma (converse part)

Control Question 42

On a DMC without feedback of capacity C , we want to transmit message with a bit error probability P_b lower than a given value $P_{b\max} \in (0, \frac{1}{2})$.

We do not now already which kind of code will be used. However, we wish to determine the maximal transmission rate $R_{\max}$ we can use on that channel (and compatible with $P_b \leq P_{b\max}$).

What is $R_{\max}$ in terms of C and $P_{b\max}$?

1. C
2. $\widetilde{\mathrm{h}}^{-1}(P_{b\max})$
3. $C - \widetilde{\mathrm{h}}(P_{b\max})$
4. $\dfrac{C}{(1 - \widetilde{\mathrm{h}}(P_{b\max}))}$
5. $\dfrac{1}{(C - \widetilde{\mathrm{h}}^{-1}(P_{b\max}))}$
6. $\widetilde{\mathrm{h}}^{-1}(1 - C/P_{b\max})$

Teorema o kodovanju u prisustvu šuma

Teorema 4.4 *Kodovanje u DMC uz prisustvo šuma*

Razmotrimo prenos poruka brzinom R preko DMC bez povratne sprege, čiji je kapacitet C. Za sve R < C i sve $\varepsilon > 0$, postoji kod za ispravljanje grešaka brzine R i greške dekodovanja $P_b < \varepsilon$.

Uopšteno govoreći ova važna teorema tvrdi da ako izaberemo odgovarajući način kodovanja informacije za zadati kanal, može se postići po želji mala greška dekodovanja, odnosno prenosa informacija.

Kontrolno pitanje 43

Razmotrimo BSC sa verovatnoćom greške p, čiji je kapacitet stoga $C = 1 - \hat{h}\,(p)$. Da li za zadate p,C i R, date u tabeli postoje kodovi koji ispunjavaju ove zahteve?

kanal	p	5%						10%					
	C	0.801						0.675					
kod	R	2/3		3/4		9/10		2/3		3/4		9/10	
	P_b (%)	1	2.2	1	2.2	1	2.2	1	2.2	1	2.2	1	2.2
da li postoji ?													

Rešenje kontrolnog pitanja 43

Ako je $R < C$ sigurni smo da postoji kod čija je greška dekodovanja bita P_b po želji mala.

Ako je $R > C$, greška dekodovanja ne može biti $\hat{h}(P_b) < 1 - \frac{C}{R}$.

Ako je R > C , i $\hat{h}(P_b) \geq 1 - \frac{C}{R}$, ne možemo ništa odredjeno zaključiti, pošto je ova situacija moguća (nije u kontradikciji sa teoremom 4.3) ali ne znamo dovoljno o konkretnoj kodnoj šemi da bi smo zaključili da li takav kod zaista može postojati.

U tabelema koje slede, data su rešenja na osnovu ovih prosudjivanja.

Rešenje kontrolnog pitanja 43

kanal	p	5%					
	C	0.801					
kod	R	$2/3$		$3/4$		$9/10$	
	P_b (%)	1	2.2	1	2.2	1	2.2
$R < C?$		da		da		ne	
$1 - C/R$		$-$		$-$		0.109	
$\widetilde{\mathrm{h}}(P_b)$		$-$		$-$		0.081	0.153
postoji?		da	da	da	da	ne	možda

Rešenje kontrolnog pitanja 43

kanal	p	10%					
	C	0.675					
kod	R	$2/3$		$3/4$		$9/10$	
	P_b (in %)	1	2.2	1	2.2	1	2.2
$R < C?$		da		ne		ne	
$1 - C/R$		$-$		0.100		0.250	
$\widetilde{\mathrm{h}}(P_b)$		$-$		0.081	0.153	0.081	0.153
postoji?		da	da	ne	možda	ne	ne

Teorema o kodovanju u prisustvu šuma istorijska dimenzija

Teorema 4.4. je bilo veliko iznenadjenje u Šenonovom radu

- C. E. Shannon: *A mathematical theory of communication.* Bell System Technical Journal, vol. 27, pp. 379–423 and 623–656, July and October, 1948

objavljenom 1948. godine. Pre ovog rezultata smatralo se da u cilju pouzdanog prenosa moramo smanjivati brzinu prenosa, ili ekvivalentno povećavati odnos signal/šum.

Šenon je srušio ovaj mit pokazujući da ako je brzina prenosa ispod kapaciteta kanala, povećanje pouzdanosti prenosa se može u potpunosti ostvariti konstrukcijom kompleksnijih sistema kodovanja i dekodovanja, bez potrebe da se menja odnos signal/šum.

Teorema o kodovanju u prisustvu šuma istorijska dimenzija

- Ova teorema nema praktičnu dimenziju. U njoj nisu datii recepti kako efikasno konstruisati dobre kodove. Npr. ništa se ne kaže kolika je dužina kodnih reči n u funkciji parametra ε.
- Stoga je nastala čitava disciplina koja se zove Teorija kodovanja (Coding Theory), čiji je cilj dizajniranje efikasnih zaštitnih kodova, odnosno kodova što veće brzine i što manje greške dekodovanja.