Kanali za prenos informacija

Milan M.Milosavljević

Ciljevi

- Prezentovanje osnova kodovanja informacionih izvora u cilju pouzdanog prenosa, čak i u prisustvu šuma.
- Formalizacija prenosa informacija preko pojma kanala
- Upoznavanje sa dva bazična pojma vezana za prenos u prisustvu šumova: kapacitet kanala i brzina prenosa
- Fundamentalne granice greške prenosa u prisustvu šuma

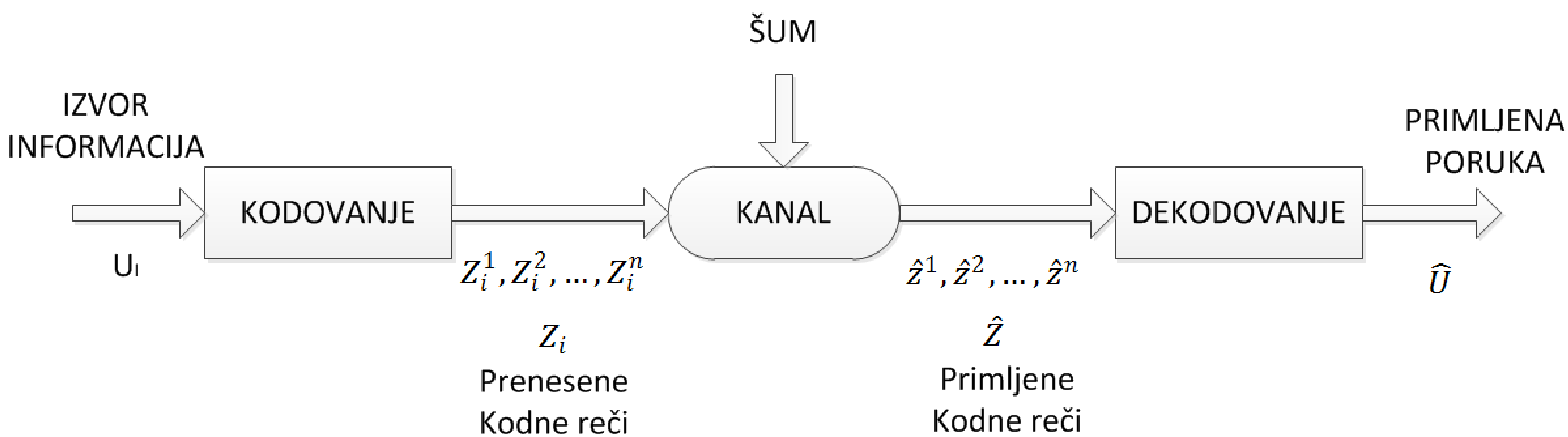
Komunikacioni kanali

- Prenos informacija podrazumeva ili njihovo prenošenje iz jedne tačke u drugu ili njihovo prenošenje kroz vreme.
- Primer prenošenja od jedne tačke do druge je komuniciranje izmedju dva mobilna telefona u jednoj mreži, dok je primer prenošenja kroz vreme memorisanje nekog sadržaja na nekom memorijskom mediju, a zatim njegovo isčitavanje u nekom budućem trenutku vremena.
- U oba slučaja, susrećemo se sa problemom pouzdanog prenosa informacija, kako usled delovanja šumova na kanalu za prenos, tako i u nedostatku memorijskog prostora ili njegovog kvara.

Komunikacioni kanali

- Sveprisutni šumovi na kanalima prenosa mogu delovati na jedan od sledećih načina:
- U uslovima izuzetno visokog šuma nije uopšte moguće obaviti pouzdan prenos poruka
- Nivo šuma je takav da je moguće preneti poruke sa prihvatljivim nivoom grešaka u prenosu
- Moguće je preneti poruke sa verovatnoćom greške koja se može učiniti po želji malom primenom kodova za ispravljanje grešaka. Osnovna ideja zaštitnog kodovanja je dodavanje redundanse u kodirane poruke, tako da i pored grešaka u prenosu preostaje dovoljno nepromenjenih informacija u kodovanim porukama na osnovu kojih se može rekonstruisati poslata poruka sa zadatim nivoom greške rekonstrukcije.

Model komunikacionog kanala



Komunikacioni kanali

Komunikacioni kanal, ili kraće kanal, reprezentuje sve što se može dogoditi sa porukom u toku njenog prenosa od predajnika do prijemnika.

Poruka je niz simbola.

Simbol je element skupa koga nazivamo alfabet. Razmatramo samo konačne alfabete.

Ulazna sekvenca $X_1, X_2, \ldots$ (sekvenca koju treba preneti) je odredjena u potpunosti informacionim izvorom.

Izlazna sekvenca $Y_1, Y_2, ..$ (primljena sekvenca) je odredjena uslovnom verovanoćom izlaza za poznati ulaz.

Stoga je u matematičkom smislu kanal odredjen uslovnim verovatnoćama različitih primljenih sekvenci, pod uslovom poznatih sekvenci koje se šalju, tj $P(y_1, y_2, \ldots, y_n | x_1, x_2, \ldots, x_n)$.

Komunikacioni kanali

Definicija 4.1 *Diskretni kanal bez memorije (DMC – Discrete Memoryless Channel)*

Diskretni kanal bez memorije je najjednostavniji komunukacioni kanal. Formalno je odredjen sa tri veličine

1. Diskretni ulazni alfabet Υ_X, čiji su elementi simboli svih ulaznih poruka izvora X.
2. Diskretni izlazni alfabet Υ_Y, čiji elementi predstavljaju moguće primljene simbole izlazne sekvence kanala
3. Za svako $X \in \Upsilon_X$, uslovne verovatnoće $p(y|x)$ nad skupom Υ_Y, tako da je za svako n=1,2,3,....

$$p(y_n|x_1, x_2, \dots, x_n, y_1, y_2, \dots, y_{n-1}) = p(y_n|x_n) \quad (4.1)$$

Ovo se nazivaju transmisione verovatnoće kanala.

Komunikacioni kanali

(4.1) je matematička formulacija činjenice da je DMC bez memorije. Ono što će se desiti sa signalom poslatim u n-tom korišćenju kanala je nezavisno od onoga što se desilo u prethodnih n-1 upotreba kanala.

Primetimo da je DMC vremenski nepromenljiv, pošto raspodela verovatnoća$p(y_n|x_n)$ne zavisi od n.

Kada su Υ_X i Υ_Y konačni, kanal se može predstaviti dijagramom u kome

1. čvorovi sa leve strane odgovaraju ulaznom alfabetuΥ_X,
2. čvorovi sa desne strane odgovaraju izlaznom alfabetu Υ_Y,
3. grane koje povezuju čvorove $x_i\ i\ y_j$ su označene uslovnim verovatnoćama$p(y_j|x_i)$, osim u slučajevima kada su ove verovatnoće jednake 0 i kada se odgovarajuća grana jednostavno izostavlja.

Komunikacioni kanali

Primer 4.1 *Binarni simetrilni kanal (BSC – Binary Symmetric Channel)*

Najprostiji DMC je binarni simetrični kanal (BSC) kod koga su Υ_X=Υ_Y=$\{0,1\}$ binarni, i

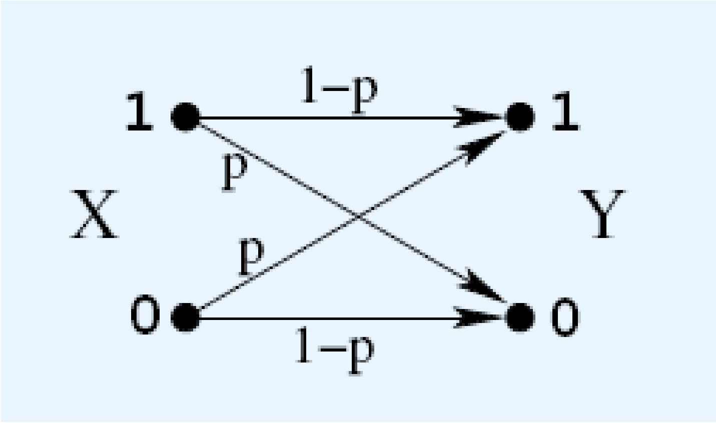
$$p_{Y|X=0}(1) = p_{Y|X=1}(0)$$

Vrednost $p = p_{Y|X=0}(1) = p_{Y|X=1}(0)$ se naziva verovatnoća greške (error rate) i to je ujedno jedini parametar BSC, budući da je $p_{Y|X=0}(0) = p_{Y|X=1}(1) = 1 - p.$ BSC se prezentuje sledećim dijagramom

Komunikacioni kanali

Primer 4.1 nastavak

Dijagram binarnog simetričnog kanala (BSC) je dat sa



Komunikacioni kanali

Primer 4.2 *Prenos preko BSC u prisustvu šuma*

Pretpostavimo da želimo da prenesemo osam poruka: 000, 001,010,011,100,101,110,111.

Pretpostavimo da je na kanalu za prenos prisutan šum, tako da u proseku se svaki 10 simbol promeni u suprotni (0 u 1 ili 1 u 0). Takav kanal je BSC sa parametrom p=0.1.

Kolika je verovatnoća da prenesemo jednu poruku korektno?

Bez obzira koja se poruka šalje ova verovatnoća iznosi

$$(1-p)^3 = 0.9^3 = 0.719$$

Što odgovara verovatnoći da tri puta prenesemo jedan bit bez greške.

Odgovarajuća verovatnoća greške je 1-0.719=0.281, dakle prilično visoka.

Komunikacioni kanali

Primer 4.2 Nastavak

Pretpostavimo sada kodovanje u kome je svaki bit prethodnog koda ponovljen (udvojen).

message	000	001	010	011	100	...	111
code	000000	000011	001100	001111	110000	...	111111

Sada je verovatnoća tačnog prijema jedne poruke $(1-p)^6 = 0.531$

Odnosno verovatnoća greške 0.469, što je veće nego u prethodnom slučaju.

Medjutim potrebno je razmotriti još jedan tip grešaka, naime kolika je verovatnoća pogrešnog prijema koja se ne može detektovati.

Komunikacioni kanali

Primer 4.2 Nastavak

Ova situacija nastaje kada se promene npr. dva simbola, npr umesto 000000 se primi 110000.

U opštem slučaju promene od 2, 4 ili svih 6 simbola dovode do pogrešnog prijema koji se ne može razlikovati od tačnog prijema.

Verovatnoća promene dva simbola je data sa

$$\binom{3}{1}\, p^2\,(1-p)^4 = 3\,p^2\,(1-p)^4.$$

Verovatnoća promene 4 simbola je data sa $3\,p^4\,(1-p)^2,$ i konačno verovatnoća promene 6 simbola je data sa $p^6.$

Ukupna verovatnoća greške koja se ne može detektovati je data zbirom

$$3\,p^2\,(1-p)^4 + 3\,p^4\,(1-p)^2 + p^6 = 0.020$$

Komunikacioni kanali

Primer 4.2 Nastavak

Ova verovatnoća je prilično mala. Zaključak je da se odgovarajućim kodovanjem može poboljšati prenos poruka preko kanala na kome deluju šumovi.

Za kanal kažemo da je bez povratne sprege ukoliko raspodela verovatnoće ulaza ne zavisi od izlaza, ili formalno

$$p_{X_n|x_1,\ldots,x_{n-1},y_1,\ldots,y_{n-1}} = p_{X_n|x_1,\ldots,x_{n-1}} \qquad (4.2)$$

Teorema 4.1

Za DMC bez povratne sprege važi

$$H(Y_1 \ldots Y_n | X_1 \ldots X_n) = \sum_{i=1}^{n} H(Y_i|X_i)$$

Kapacitet kanala

Kapacitet kanala meri sposobnost jednog kanala da prenosi informacije. To je maksimalna prosečna količina informacija koje ulaz kanala može preneti na izlaz.

Definicija 4.2 *Kapacitet kanala*

Kapacitet C diskretnog kanala bez memorije jednak je

$$C = \max_{p_X} I(X;Y),$$

gde je X ulaz u kanal, opisan raspodelom verovatnoće $p_X(x)$, dok je Y izlaz kanala

Komunikacioni kanali

Primer 4.3 Kapacitet BSC

Po definiciji

$$C = \max_{p_X}\Big(H(Y) - H(Y|X)\Big).$$

Imajući u vidu da je za BSC $P(Y \neq X) = p$ $P(Y = X) = 1 - p,$

imamo da je

$$H(Y|X) = -p\log(p) - (1-p)\log(1-p) =: \widetilde{\mathrm{h}}(p),$$

i ne zavisi od $p_X(x)$, tako da je konačno

$$C = \max_{p_X}\Big(H(Y)\Big) - \widetilde{\mathrm{h}}(p).$$

Komunikacioni kanali

Primer 4.3 nastavak

Kako je Y binarna slučajna promenljiva, važi $H(Y) \leq \log 2$, odnosno $H(Y) \leq 1$ bit. Da li se ova granica može dostići za neku raspodelu $p_X(x)$?Odgovor je da, ukoliko je X uniformno raspodeljeno. Tada imamo

$$p_Y(0) = p \cdot p_X(1) + (1-p) \cdot p_X(0) = 0.5\, p + 0.5\, (1-p) = 0.5$$

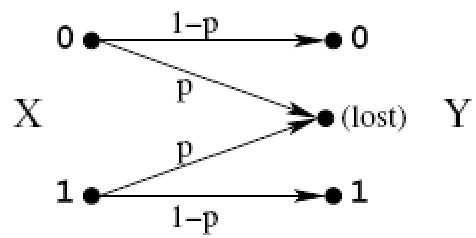
Što znači da je Y takodje uniformno raspodeljeno, odnosno da je H(Y)=1 bit. Stoga je $\max_X H(Y) = 1 \text{ bit}$, odnosno, konačno

$$C = 1 - \widetilde{\mathrm{h}}(p)$$ (u bitima) .

Komunikacioni kanali

Control Question 39

What is the capacity of the "binary erasure channel" defined by the following graph:



Is it (in the most general case):

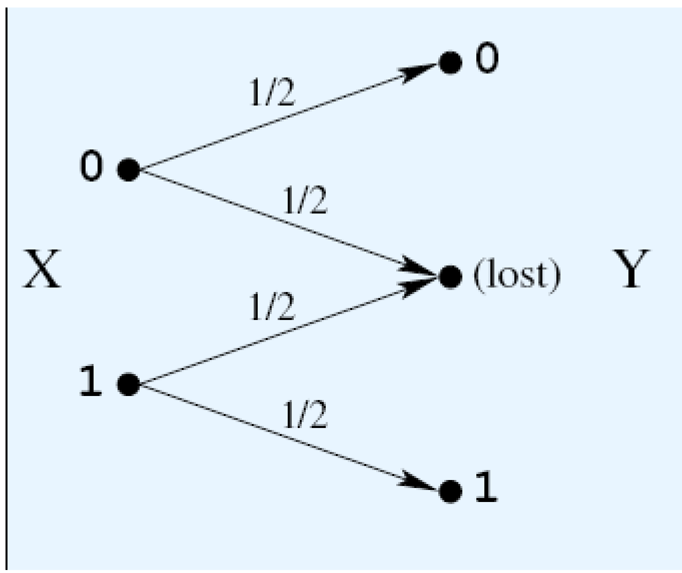
1. $C = 1 - \widetilde{\mathrm{h}}(p) = 1 + p\log p + (1-p)\log(1-p)$,
2. $C = 1 - p$,
3. $C = 1$,
4. $C = 1 + \widetilde{\mathrm{h}}(p) = 1 - p\log p - (1-p)\log(1-p)$,
5. or $C = 1 + p$?

Kanali sa simetričnim ulazom

Definicija 4.3

DMC kanal je sa simetričnim ulazom ukoliko je raspodela verovatnoće greške ista za sve ulazne simbole, odnosno ukoliko je skup $\{p_{Y|x_i}(y) : y \in \mathcal{V}_Y\}$ nezavisan od x_i.

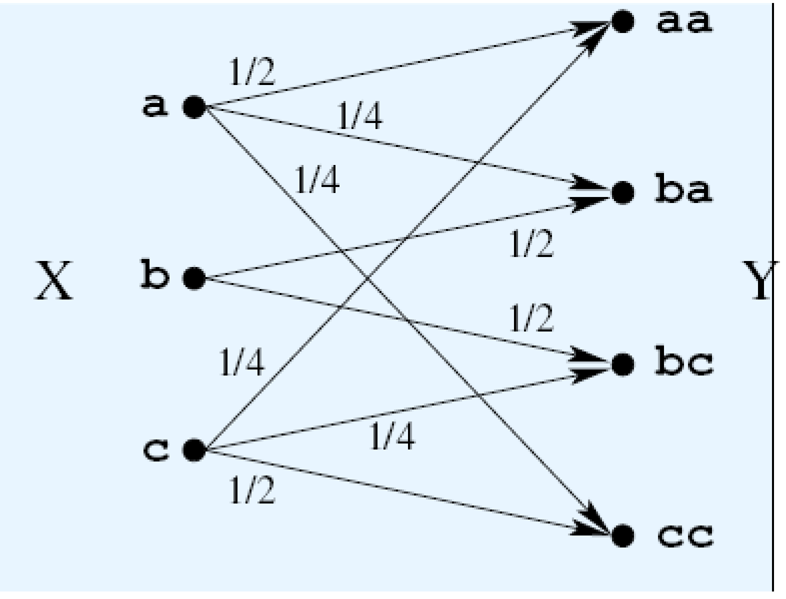
Primer 4.4 *Kanal sa simetričnim ulazom*



Kanal sa simetričnim ulazom i nesimetričnim izlazom.

Kanali sa simetričnim ulazom

Primer 4.4 Nastavak



Primer DMC kanala sa simetričnim izlazom i ne simetričnim ulazom.

BSC je kanal sa simetričnim ulazom.

Kanali sa simetričnim ulazom

Lema 4.1

Za svaki DMC sa simetričnim ulazom, H(Y|X) je nezavisna od raspodele$p_X(x), i$

$$H(Y|X) = H(Y|x_i)$$

za svako $x_i \in \mathcal{V}_X$.

Stoga je nalaženje raspodele verovatnoće ulaza za koju se dostiže kapacitet simetričnog DMC kanala, ekvivalentno nalaženju ulaza koji maksimizuje neodredjenost izlaza.

Osobina 4.1

Za svaki DMC sa simetričnim ulazom, važi $C = \max_{P_X} [H(Y)] - H_0$

gde je $H_0 = H(Y|X = x_i)$ za svako $x_i \in \mathcal{V}_X$.

Kanali sa simetričnim izlazom

Kanali sa simetričnim ulazom su oni čije verovatnoće grana koje napuštaju svaki ulazni simbol u dijagramu kanala su iste za svaki simbol (iste do na permutaciju grana).

Sada ćemo razmotriti kanale kod kojih su verovatnoće grana koje dolaze do izlaznih simbola iste (iste do na permutaciju grana).

Definicija 4.3a *Kanali sa simetričnim izlazom*

DMC je sa simetričnim izlazom kada je skup $\{p_{Y|x}(y_i) : x \in \mathcal{V}_X\}$ nezavisan od y_i .

Primer 4.5

BSC kanal iz primera 4.1 je sa simetričnim izlazom.

Kanali sa simetričnim izlazom

Lema 4.2

Kod DMC sa simetričnim izlazom, uniformna raspodela verovatnoća ulaza ($p_X(x_i)$ je ista za svako x_i) rezultuje u uniformnoj raspodeli verovatnoća na izlazu ($p_Y(y_i)$ je isto za svako y_i).

Osobina 4.2

Za svaki DMC sa simetričnim izlazom važi

$$\max_{p_X} H(Y) = \log |\mathcal{V}_Y|.$$

Simetrični kanali

Definicija 4.4 *Simetrični kanal*

DMC je simetričan ako je istovremeno sa simetričnim ulazom i sa simetričnim izlazom.

Teorema 4.2

Kapacitet simetričnog kanala je dat sa

$$C = \log|\mathcal{V}_Y| - H_0$$

gde je $H_0 = H(Y|X = x_i)$ za svaki ulazni simbol $x_i \in \mathcal{V}_X$.

Simetrični kanali

Primer 4.6

BSC iz primera 4.1 je simetričan kanal kod koga je

$$H_0 = \widetilde{\mathrm{h}}(p) = -p \log p - (1-p)\log(1-p).$$

Stoga je

$$C_{\mathrm{BSC}} = \log 2 - \widetilde{\mathrm{h}}(p) = 1 - \widetilde{\mathrm{h}}(p) \quad \text{(u bitima).}$$

Brzina prenosa

Definicija 4.5 *Brzina prenosa*

Brzina prenosa (za osnovu b) koda kojim se koduje diskretan izvor U sa $|\Upsilon_U|$ poruka, čije su kodne reči fiksne dužine n je definisana sa

$$R_b = \frac{\log_b |\mathcal{V}_U|}{n}$$

Primetimo da je $|\Upsilon_U|$ istovremeno i broj mogućih kodnih reči determinističkih nesingularnih kodova.

Po pravilu se osnova b za računanje brzine koda uzima da je jednaka arnosti koda

Brzina prenosa

Primer 4.7

U primeru 4.2 (binarni kod sa 8 kodnih reči i dužinom kodnih reči 6), brzina prenosa je

$$R = \frac{\log 8}{6} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

Ovo izgleda razumno, budući da se u ovom kodu koristi dva puta više bita nego što emituje izvor.

Control Question 40

On a noisy channel, we plan to use a code consisting of tripling each symbol of the messages. For instance a will be transmitted as aaa.

What is the transmission rate R of such a code?
(If you are a bit puzzled by the base, choose for the base the arity of the source, i.e. the number of different symbols the source can emit)