Matematika

Dejan Živković

Grafici elementarnih funkcija

- Polinomske funkcija (konstantna, linearna, kvadratna, …)
- Racionalne funkcija
- Funkcija apsolutne vrednosti
- Funkcija kvadratnog korena
- Trigonometrijske funkcije (sin, cos, tan)
- Eksponencijalna (stepena) funkcija

Grafici elementarnih funkcija

- Logaritamska funkcija:

$$f(x) = \log_a x, \quad 0 < a \neq 1$$

Grafici elementarnih funkcija

- Logaritamska funkcija:

$$f(x) = \log_a x, \quad 0 < a \neq 1$$

- $\log_a x = y$ tako da $a^y = x$

Grafici elementarnih funkcija

- Logaritamska funkcija:

$$f(x) = \log_a x, \quad 0 < a \neq 1$$

- $\log_a x = y$ tako da $a^y = x$

- Primeri:

$$\log_5 25 =$$

Grafici elementarnih funkcija

- Logaritamska funkcija:

$$f(x) = \log_a x, \quad 0 < a \neq 1$$

- $\log_a x = y$ tako da $a^y = x$

- Primeri:

$\log_5 25 = 2$ jer $5^2 = 25$

$\log_{10} 1 =$

Grafici elementarnih funkcija

- Logaritamska funkcija:

$$f(x) = \log_a x, \quad 0 < a \neq 1$$

- $\log_a x = y$ tako da $a^y = x$

- Primeri:

$$\log_5 25 = 2 \text{ jer } 5^2 = 25$$

$$\log_{10} 1 = 0 \text{ jer } 10^0 = 1$$

$$\log_2 1024 =$$

Grafici elementarnih funkcija

- Logaritamska funkcija:

$$f(x) = \log_a x, \quad 0 < a \neq 1$$

- $\log_a x = y$ tako da $a^y = x$

- Primeri:

$\log_5 25 = 2$ jer $5^2 = 25$

$\log_{10} 1 = 0$ jer $10^0 = 1$

$\log_2 1024 = 10$ jer $2^{10} = 1024$

$\log_2 \frac{1}{16} =$

Grafici elementarnih funkcija

- Logaritamska funkcija:

$$f(x) = \log_a x, \quad 0 < a \neq 1$$

- $\log_a x = y$ tako da $a^y = x$

- Primeri:

$$\log_5 25 = 2 \text{ jer } 5^2 = 25$$

$$\log_{10} 1 = 0 \text{ jer } 10^0 = 1$$

$$\log_2 1024 = 10 \text{ jer } 2^{10} = 1024$$

$$\log_2 \frac{1}{16} = -4 \text{ jer } 2^{-4} = \frac{1}{16}$$

Grafici elementarnih funkcija

- Notacija:

$$\log x = \log_{10} x \quad \text{(dekadni logaritam)}$$

$$\ln x = \log_e x \quad \text{(prirodni logaritam)}$$

Grafici elementarnih funkcija

- Notacija:

$$\log x = \log_{10} x \quad \text{(dekadni logaritam)}$$

$$\ln x = \log_e x \quad \text{(prirodni logaritam)}$$

- Pravila logaritmovanja

$$\log_a 1 = 0 \qquad \log_a a = 1$$

$$\log_a a^x = x \qquad a^{\log_a x} = x$$

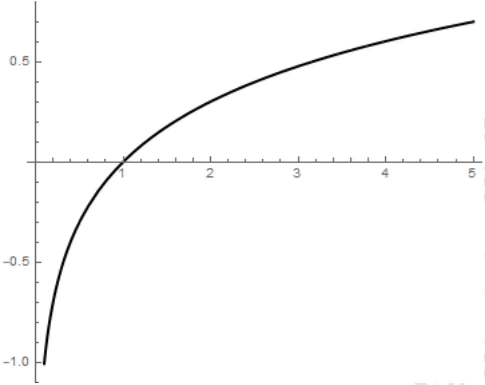
$$\log_a (xy) = \log_a x + \log_a y$$

$$\log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y$$

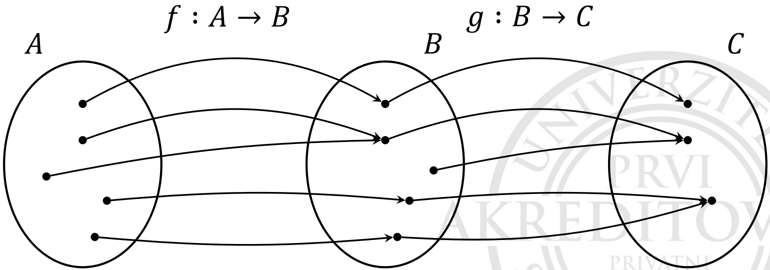
$$\log_a x^y = y \log_a x$$

Grafici elementarnih funkcija

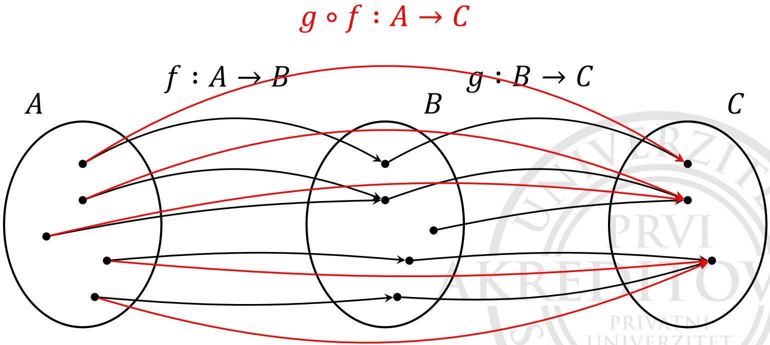
- Primer: $a = 10 > 1, \quad f(x) = \log_{10} x = \log x$



Proizvod (kompozicija) funkcija



Proizvod (kompozicija) funkcija



Proizvod (kompozicija) funkcija

- Definicija: $f : A \to B$ i $g : B \to C$ dve funkcije. Proizvod (kompozicija) funkcija f and g je funkcija iz A u C takva da se svakom elemetntu $x \in A$ dodeljuje element $g(f(x)) \in C$.
- Oznaka: $g \circ f$
- $g \circ f : A \to C, \quad (g \circ f)(x) = g(f(x))$

Proizvod (kompozicija) funkcija

- Primer:
  - $A = \{1, 2, 3\}, B = \{a, b, c, d\}, C = \{-1, -2, -3, -4\}$

$$
\begin{array}{ll}
f : A \to B & g : B \to C \\
1 \to b & a \to -3 \\
2 \to a & b \to -1 \\
3 \to d & c \to -2 \\
 & d \to -2
\end{array}
$$

Proizvod (kompozicija) funkcija

- Primer:
  - $A = \{1, 2, 3\}, B = \{a, b, c, d\}, C = \{-1, -2, -3, -4\}$

$$
\begin{array}{ll}
f : A \to B & g : B \to C \\
1 \to b & a \to -3 \\
2 \to a & b \to -1 \\
3 \to d & c \to -2 \\
 & d \to -2
\end{array}
$$

  - $g \circ f : A \to C$?

Proizvod (kompozicija) funkcija

- Primer:
  - $A = \{1, 2, 3\}, B = \{a, b, c, d\}, C = \{-1, -2, -3, -4\}$

$f : A \to B$	$g : B \to C$
$1 \to b$	$a \to -3$
$2 \to a$	$b \to -1$
$3 \to d$	$c \to -2$
	$d \to -2$

  - $g \circ f : A \to C$?

$1 \to -1$
$2 \to -3$
$3 \to -2$

Proizvod (kompozicija) funkcija

- Primer: $f(x) = \sqrt{x}, \quad g(x) = x - 2$

Proizvod (kompozicija) funkcija

- Primer: $f(x) = \sqrt{x}, \quad g(x) = x - 2$

  $f : [0, +\infty) \to R,\ g : R \to R,\ g \circ f : [0, +\infty) \to R$

Proizvod (kompozicija) funkcija

- Primer: $f(x) = \sqrt{x}, \quad g(x) = x - 2$

  $f : [0, +\infty) \to R,\ g : R \to R,\ g \circ f : [0, +\infty) \to R$

  - $(g \circ f)(9) = ?$

Proizvod (kompozicija) funkcija

- Primer: $f(x) = \sqrt{x}, \quad g(x) = x - 2$

  $f : [0, +\infty) \to R,\ g : R \to R,\ g \circ f : [0, +\infty) \to R$

  - $(g \circ f)(9) = ?$
  - $(g \circ f)(0) = ?$

Proizvod (kompozicija) funkcija

- $(g \circ f)(x) = g(f(x))$
- $(f \circ g)(x) = f(g(x))$
- Primer: $f(x) = \sqrt{x}, \quad g(x) = x - 2$

Proizvod (kompozicija) funkcija

- $(g \circ f)(x) = g(f(x))$
- $(f \circ g)(x) = f(g(x))$
- Primer: $f(x) = \sqrt{x}, \quad g(x) = x - 2$
  - $(f \circ g)(6) = ?$

Proizvod (kompozicija) funkcija

- $(g \circ f)(x) = g(f(x))$
- $(f \circ g)(x) = f(g(x))$
- Primer: $f(x) = \sqrt{x}, \quad g(x) = x - 2$
  - $(f \circ g)(6) = ?$
  - $(f \circ g)(1) = ?$

  Da bi $f(g(x))$ bilo definisano, mora $g(x)$ biti u oblasti definisanosti f!

Proizvod (kompozicija) funkcija

- $(g \circ f)(x) = g(f(x))$
- $(f \circ g)(x) = f(g(x))$
- Primer: $f(x) = \sqrt{x}, \quad g(x) = x - 2$

Proizvod (kompozicija) funkcija

- $(g \circ f)(x) = g(f(x))$
- $(f \circ g)(x) = f(g(x))$
- Primer: $f(x) = \sqrt{x}, \quad g(x) = x - 2$
  - $(f \circ g)(6) = ?$

Proizvod (kompozicija) funkcija

- $(g \circ f)(x) = g(f(x))$
- $(f \circ g)(x) = f(g(x))$
- Primer: $f(x) = \sqrt{x}, \quad g(x) = x - 2$

  - $(f \circ g)(6) = ?$

  - $(f \circ g)(1) = ?$

  Da bi $f(g(x))$ bilo definisano, mora $g(x)$ biti u oblasti definisanosti f!

Proizvod (kompozicija) funkcija

- Primer: $f(x) = x^2, \quad g(x) = 2x - 1$

Proizvod (kompozicija) funkcija

- Primer: $f(x) = x^2, \quad g(x) = 2x - 1$
  - $(f \circ g)(x) =$

Proizvod (kompozicija) funkcija

- Primer: $f(x) = x^2, \quad g(x) = 2x - 1$
  - $(f \circ g)(x) = 4x^2 + 4x + 1$
  - $(g \circ f)(x) =$

Proizvod (kompozicija) funkcija

- Primer: $f(x) = x^2, \quad g(x) = 2x - 1$
  - $(f \circ g)(x) = 4x^2 + 4x + 1$
  - $(g \circ f)(x) = 2x^2 + 1$

Proizvod (kompozicija) funkcija

- Primer: $f(x) = x^2, \quad g(x) = 2x - 1$
  - $(f \circ g)(x) = 4x^2 + 4x + 1$
  - $(g \circ f)(x) = 2x^2 + 1$
- $f \circ g \neq g \circ f$ u opštem slučaju

Proizvod (kompozicija) funkcija

- Primer: $f(x) = 2x + 1, \quad g(x) = \dfrac{x-1}{2}$

Proizvod (kompozicija) funkcija

- Primer: $f(x) = 2x + 1, \quad g(x) = \dfrac{x-1}{2}$
  - $(f \circ g)(x) =$

Proizvod (kompozicija) funkcija

- Primer: $f(x) = 2x + 1, \quad g(x) = \dfrac{x-1}{2}$
  - $(f \circ g)(x) = x$
  - $(g \circ f)(x) =$

Proizvod (kompozicija) funkcija

- Primer: $f(x) = 2x + 1, \quad g(x) = \frac{x-1}{2}$
  - $(f \circ g)(x) = x$
  - $(g \circ f)(x) = x$

Proizvod (kompozicija) funkcija

- Primer: $f(x) = 2x + 1, \quad g(x) = \dfrac{x-1}{2}$
  - $(f \circ g)(x) = x$
  - $(g \circ f)(x) = x$
- f i g inverzne funkcije jedna drugoj
- Za datu funkciju f, kada postoji njena inverzna funkcija?

Injektivne funkcije

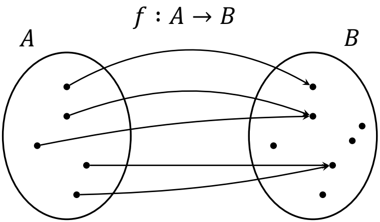
- $f : A \to B$ je injektivna ("1–1") ako

$$x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$$

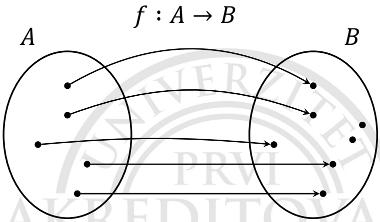
Injektivne funkcije

- $f : A \to B$ je injektivna ("1–1") ako

$$x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$$



ne-injektivna funkcija

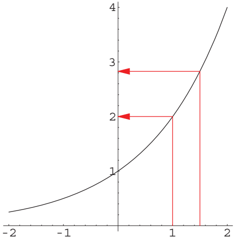


injektivna funkcija

Injektivne funkcije

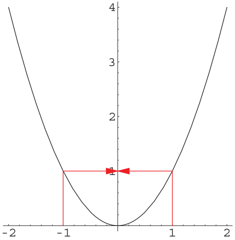
- Primer:

$f(x) = 2^x$ je injektivna



$x_1 \neq x_2 \Longrightarrow 2^{x_1} \neq 2^{x_2}$

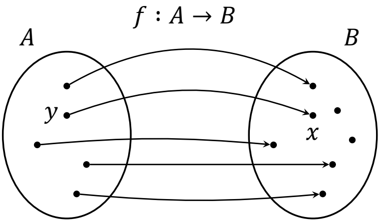
$f(x) = x^2$ NIJE injektivna



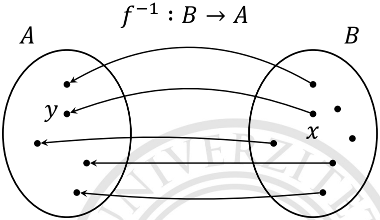
$-1 \neq 1$ ali $(-1)^2 = 1^2$

- Geometrijski, f je injektivna znači da njen grafik seče svaku horizontalnu pravu u najviše jednoj tački

Inverzne funkcije



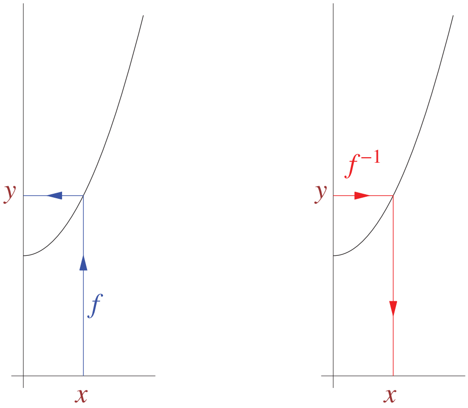
injektivna funkcija f



inverzna funkcija od f

Inverzne funkcije

- Interpretacija f^{-1}



- f^{-1} je obrnut postupak od f

Inverzne funkcije

- Definicija:
  - $f : A \to B$ — injektivna funkcija
  - $B_1 \subseteq B$ — skup slika funkcije f
  - Za svako $y \in B_1$ postoji tačno jedno $x \in A$ tako da $f(x) = y$
  - Svako $y \in B_1$ može se koristiti kao ulaz da bi se dobio tačno jedan izlaz $x \in A$
  - Dobija se inverzna funkcija od f, oznaka f^{-1}
  - $f^{-1} : B_1 \to A$, pri čemu

    $y = f^{-1}(x)$ tako da je y rešenje za $f(y) = x$

Inverzne funkcije

- Primer: $f: R \to R, \quad f(x) = 3x - 1.$
  Naći f^{-1}.

Inverzne funkcije

- Primer: $f : R \to R, \quad f(x) = 3x - 1.$
  Naći f^{-1}.
- Formirati $x = f(y)$ i rešiti po y

Inverzne funkcije

- Primer: $f : R \to R, \quad f(x) = 3x - 1.$
  Naći f^{-1}.
- Formirati $x = f(y)$ i rešiti po y

$$x = 3y - 1$$

Inverzne funkcije

- Primer: $f: R \to R, \quad f(x) = 3x - 1.$
  Naći f^{-1}.

- Formirati $x = f(y)$ i rešiti po y

$$x = 3y - 1$$

$$3y = x + 1$$

Inverzne funkcije

- Primer: $f : R \to R, \quad f(x) = 3x - 1.$
  Naći f^{-1}.

- Formirati $x = f(y)$ i rešiti po y

$$x = 3y - 1$$

$$3y = x + 1$$

$$y = \frac{x+1}{3} = f^{-1}(x)$$

Inverzne funkcije

- Primer: $f : [0, +\infty) \to R, \quad f(x) = 2x^2 + 1.$
  Naći f^{-1}.

Inverzne funkcije

- Primer: $f : [0, +\infty) \to R, \quad f(x) = 2x^2 + 1.$
  Naći f^{-1}.

- Formirati $x = f(y)$ i rešiti po y

Inverzne funkcije

- Primer: $f : [0, +\infty) \to R, \quad f(x) = 2x^2 + 1.$
  Naći f^{-1}.

- Formirati $x = f(y)$ i rešiti po y

$$x = 2y^2 + 1$$

Inverzne funkcije

- Primer: $f : [0, +\infty) \to R, \quad f(x) = 2x^2 + 1.$ Naći f^{-1}.

- Formirati $x = f(y)$ i rešiti po y

$$x = 2y^2 + 1$$

$$2y^2 = x - 1$$

Inverzne funkcije

- Primer: $f : [0, +\infty) \rightarrow R, \quad f(x) = 2x^2 + 1.$
Naći f^{-1}.

- Formirati $x = f(y)$ i rešiti po y

$$x = 2y^2 + 1$$
$$2y^2 = x - 1$$
$$y = \sqrt{\frac{x-1}{2}} = f^{-1}(x)$$