

# Matematika

Dejan Živković



# Realne funkcije

- $f : A \rightarrow R, \quad A \subseteq R$
- $y = f(x), \quad f(x)$  – izraz (formula)
- $A = \text{Dom}(f)$  – domen (oblast definisanosti) se implicitno podrazumeva



## Realne funkcije

- $f : A \rightarrow R, \quad A \subseteq R$
- $y = f(x), \quad f(x)$  – izraz (formula)
- $A = \text{Dom}(f)$  – domen (oblast definisanosti) se implicitno podrazumeva
- Grafik funkcije  $y = f(x)$  je podskup od  $R^2$ :  
 $\{(x, y) \in R^2 : x \in \text{Dom}(f) \text{ i } y = f(x)\}$

# Grafici elementarnih funkcija

- Konstantna funkcija:

$$f(x) = c$$



## Grafici elementarnih funkcija

- Konstantna funkcija:

$$f(x) = c$$

- Linearna funkcija:

$$f(x) = ax + b, \text{ gde } a \neq 0$$



## Grafici elementarnih funkcija

- Konstantna funkcija:

$$f(x) = c$$

- Linearna funkcija:

$$f(x) = ax + b, \text{ gde } a \neq 0$$

- Kvadratna funkcija:

$$f(x) = ax^2 + bx + c, \text{ gde } a \neq 0$$



## Grafici elementarnih funkcija

- Konstantna funkcija:

$$f(x) = c$$

- Linearna funkcija:

$$f(x) = ax + b, \text{ gde } a \neq 0$$

- Kvadratna funkcija:

$$f(x) = ax^2 + bx + c, \text{ gde } a \neq 0$$

- $a > 0$ , konveksna ("smešna", "puna čaša")
- $a < 0$ , konkavna, ("tužna", "prazna čaša")

## Grafici elementarnih funkcija

- Primer: nacrtati grafik funkcije

$$f(x) = 2x^2 + 4x - 5$$

i odrediti njenu ekstremnu tačku



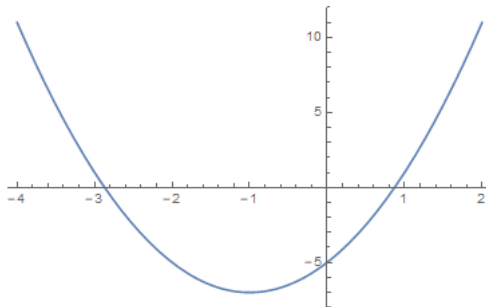


## Grafici elementarnih funkcija

- Primer: nacrtati grafik funkcije

$$f(x) = 2x^2 + 4x - 5$$

i odrediti njenu ekstremnu tačku



# Grafici elementarnih funkcija

- Polinomska funkcija stepena  $n$ :

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$$

- $n = 0$ , konstantna funkcija
- $n = 1$ , linearna funkcija
- $n = 2$ , kvadratna funkcija
- $n = 3$ , kubna funkcija, npr.  $f(x) = x^3 - 3x^2 + x - 2$
- $n = 4$ , npr.  $f(x) = 1 - 2x + 3x^2 - 5x^4$
- ...

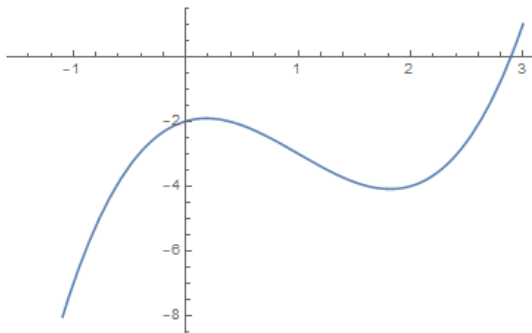
## Grafici elementarnih funkcija

- Primer:  $f(x) = x^3 - 3x^2 + x - 2$



## Grafici elementarnih funkcija

- Primer:  $f(x) = x^3 - 3x^2 + x - 2$



# Grafici elementarnih funkcija

- Racionalna funkcija:

$$f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$$

gde su  $p(x)$  i  $q(x)$  polinomske funkcije



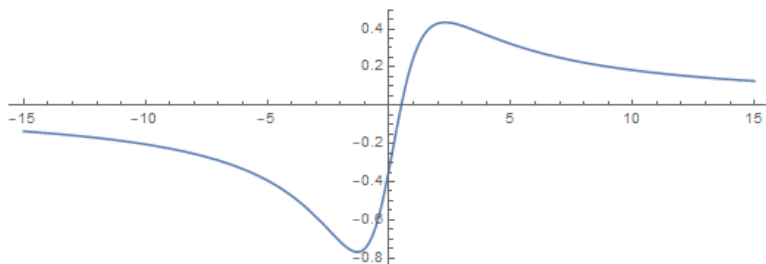
## Grafici elementarnih funkcija

- Primer:  $f(x) = \frac{2x - 1}{x^2 + 3}$



## Grafici elementarnih funkcija

■ Primer:  $f(x) = \frac{2x - 1}{x^2 + 3}$



## Grafici elementarnih funkcija

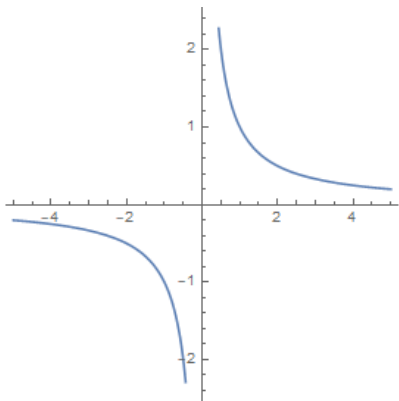
- Primer:  $f(x) = \frac{1}{x}$





## Grafići elementarnih funkcija

- Primer:  $f(x) = \frac{1}{x}$



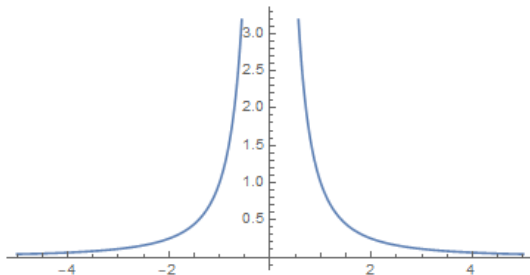
# Grafici elementarnih funkcija

- Primer:  $f(x) = \frac{1}{x^2}$



# Grafici elementarnih funkcija

- Primer:  $f(x) = \frac{1}{x^2}$



# Grafici elementarnih funkcija

- Funkcija apsolutne vrednosti:

$$f(x) = |x|$$



# Grafici elementarnih funkcija

- Funkcija apsolutne vrednosti:

$$f(x) = |x| = \begin{cases} x, & \text{ako je } x \geq 0 \\ -x, & \text{ako je } x < 0 \end{cases}$$



## Grafici elementarnih funkcija

- Funkcija apsolutne vrednosti:

$$f(x) = |x| = \begin{cases} x, & \text{ako je } x \geq 0 \\ -x, & \text{ako je } x < 0 \end{cases}$$

- $|2| = 2$



# Grafici elementarnih funkcija

- Funkcija apsolutne vrednosti:

$$f(x) = |x| = \begin{cases} x, & \text{ako je } x \geq 0 \\ -x, & \text{ako je } x < 0 \end{cases}$$

- $|2| = 2$
- $|-3| = -(-3) = 3$



# Grafici elementarnih funkcija

- Funkcija apsolutne vrednosti:

$$f(x) = |x| = \begin{cases} x, & \text{ako je } x \geq 0 \\ -x, & \text{ako je } x < 0 \end{cases}$$

- $|2| = 2$
- $|-3| = -(-3) = 3$
- $|a|$  je rastojanje od  $a$  od 0





# Grafici elementarnih funkcija

- Funkcija apsolutne vrednosti:

$$f(x) = |x| = \begin{cases} x, & \text{ako je } x \geq 0 \\ -x, & \text{ako je } x < 0 \end{cases}$$

- $|2| = 2$
- $|-3| = -(-3) = 3$
- $|a|$  je rastojanje od  $a$  od 0
- $|a|$  je uvek nenegativno



# Grafici elementarnih funkcija

- Funkcija apsolutne vrednosti:

$$f(x) = |x| = \begin{cases} x, & \text{ako je } x \geq 0 \\ -x, & \text{ako je } x < 0 \end{cases}$$

- $|2| = 2$
- $|-3| = -(-3) = 3$
- $|a|$  je rastojanje od  $a$  od 0
- $|a|$  je uvek nenegativno
- $|a| = |-a|$



# Grafici elementarnih funkcija

- Funkcija apsolutne vrednosti:

$$f(x) = |x| = \begin{cases} x, & \text{ako je } x \geq 0 \\ -x, & \text{ako je } x < 0 \end{cases}$$

- $|2| = 2$
- $|-3| = -(-3) = 3$
- $|a|$  je rastojanje od  $a$  od 0
- $|a|$  je uvek nenegativno
- $|a| = |-a|$
- $|a - b|$  je rastojanje od  $a$  od  $b$



# Grafici elementarnih funkcija

- Funkcija apsolutne vrednosti:

$$f(x) = |x| = \begin{cases} x, & \text{ako je } x \geq 0 \\ -x, & \text{ako je } x < 0 \end{cases}$$

- $|2| = 2$
- $|-3| = -(-3) = 3$
- $|a|$  je rastojanje od  $a$  od 0
- $|a|$  je uvek nenegativno
- $|a| = |-a|$
- $|a - b|$  je rastojanje od  $a$  od  $b$
- $\sqrt{a^2}$



# Grafici elementarnih funkcija

- Funkcija apsolutne vrednosti:

$$f(x) = |x| = \begin{cases} x, & \text{ako je } x \geq 0 \\ -x, & \text{ako je } x < 0 \end{cases}$$

- $|2| = 2$
- $|-3| = -(-3) = 3$
- $|a|$  je rastojanje od  $a$  od 0
- $|a|$  je uvek nenegativno
- $|a| = |-a|$
- $|a - b|$  je rastojanje od  $a$  od  $b$
- $\sqrt{a^2} = |a|$



## Grafici elementarnih funkcija

- Grafik funkcije apsolutne vrednosti

$$f(x) = \begin{cases} x, & \text{ako je } x \geq 0 \\ -x, & \text{ako je } x < 0 \end{cases}$$

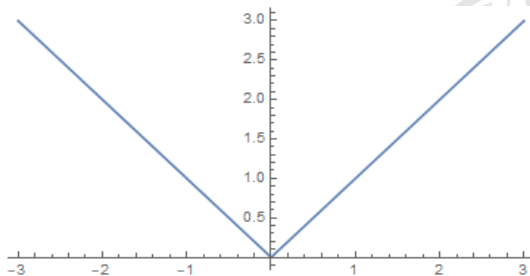


## Grafici elementarnih funkcija

- Grafik funkcije apsolutne vrednosti

$$f(x) = \begin{cases} x, & \text{ako je } x \geq 0 \\ -x, & \text{ako je } x < 0 \end{cases}$$

- Podeliti realnu pravu u dva podintervala  $[0, \infty$  i  $(-\infty, 0)$



# Grafici elementarnih funkcija

- Primer: grafik funkcije

$$f(x) = 1 - |x|$$





## Grafici elementarnih funkcija

- Primer: grafik funkcije

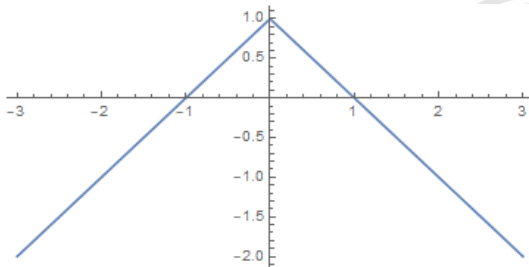
$$f(x) = 1 - |x| = \begin{cases} 1 - x, & \text{ako je } x \geq 0 \\ 1 + x, & \text{ako je } x < 0 \end{cases}$$



# Grafići elementarnih funkcija

- Primer: grafik funkcije

$$f(x) = 1 - |x| = \begin{cases} 1 - x, & \text{ako je } x \geq 0 \\ 1 + x, & \text{ako je } x < 0 \end{cases}$$



## Grafici elementarnih funkcija

- Primer: grafik funkcije

$$f(x) = |x - 1| = \begin{cases} x - 1, & \text{ako je } x - 1 \geq 0 \\ -(x - 1), & \text{ako je } x - 1 < 0 \end{cases}$$
$$= \begin{cases} x - 1, & \text{ako je } x \geq 1 \\ 1 - x, & \text{ako je } x < 1 \end{cases}$$

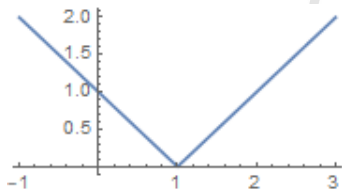


# Grafici elementarnih funkcija

- Primer: grafik funkcije

$$f(x) = |x - 1| = \begin{cases} x - 1, & \text{ako je } x - 1 \geq 0 \\ -(x - 1), & \text{ako je } x - 1 < 0 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} x - 1, & \text{ako je } x \geq 1 \\ 1 - x, & \text{ako je } x < 1 \end{cases}$$



# Grafici elementarnih funkcija

- Funkcija kvadratnog korena:

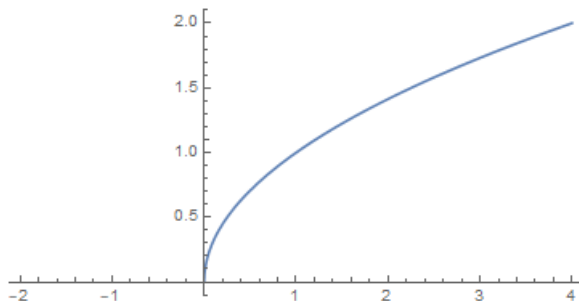
$$f(x) = \sqrt{x}$$



# Grafici elementarnih funkcija

- Funkcija kvadratnog korena:

$$f(x) = \sqrt{x}$$



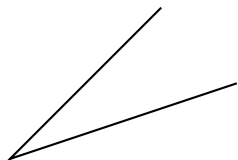
# Grafici elementarnih funkcija

- Trigonometrijske funkcije:  $\sin x$ ,  $\cos x$ ,  $\tan x$



# Grafici elementarnih funkcija

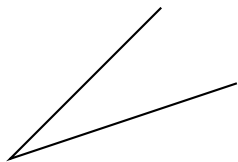
- Trigonometrijske funkcije:  $\sin x$ ,  $\cos x$ ,  $\tan x$
- Ugao





# Grafici elementarnih funkcija

- Trigonometrijske funkcije:  $\sin x$ ,  $\cos x$ ,  $\tan x$
- Ugao

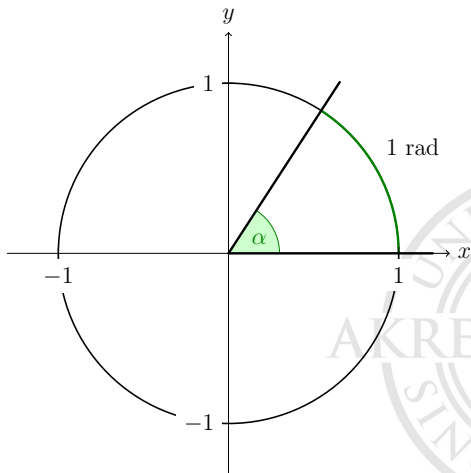


- Merenje uglova
  - Stepeni
  - Radijani



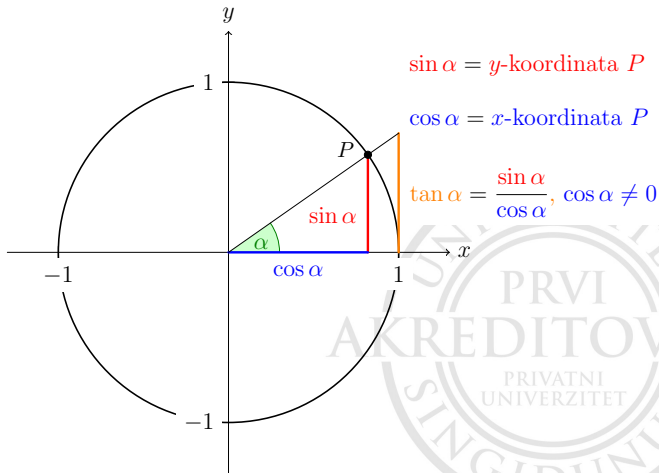
# Grafici elementarnih funkcija

- Trigonometrijski (jedinični) krug



# Grafici elementarnih funkcija

## ■ Trigonometrijske funkcije



# Grafici elementarnih funkcija

## ■ Specijalni uglovi

$$\sin 0 = 0$$

$$\sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$$

$$\sin \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\sin \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\sin \frac{\pi}{2} = 1$$

$$\cos 0 = 1$$

$$\cos \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\cos \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\cos \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$$

$$\cos \frac{\pi}{2} = 0$$



# Grafici elementarnih funkcija

## ■ Specijalni uglovi

$$\sin 0 = 0$$

$$\cos 0 = 1$$

$$\sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$$

$$\cos \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\sin \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\cos \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\sin \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\cos \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$$

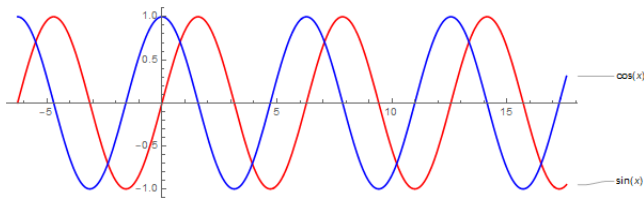
$$\sin \frac{\pi}{2} = 1$$

$$\cos \frac{\pi}{2} = 0$$

## ■ $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$

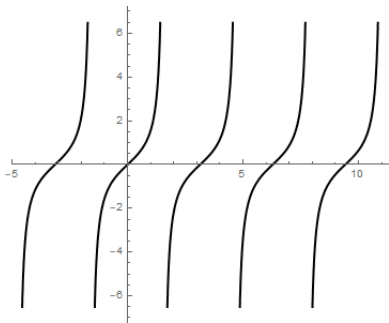
# Grafici elementarnih funkcija

- $y = \sin x$  i  $y = \cos x$



## Grafići elementarnih funkcija

- $y = \tan x$



- $\cos x = 0$  za  $x = \pm \frac{\pi}{2}, \pm \frac{3\pi}{2}, \pm \frac{5\pi}{2}, \dots$

$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$  nije definisan za  $x = \pm \frac{\pi}{2}, \pm \frac{3\pi}{2}, \pm \frac{5\pi}{2}, \dots$

## Grafici elementarnih funkcija

- Eksponencijalna (stepena) funkcija:

$$f(x) = a^x, \quad 0 < a \neq 1$$





## Grafici elementarnih funkcija

- Eksponencijalna (stepena) funkcija:

$$f(x) = a^x, \quad 0 < a \neq 1$$

- Pravila stepenovanja

$$a^0 = 1$$

$$a^x a^y = a^{x+y}$$

$$(ab)^x = a^x b^x$$

$$(a^x)^y = a^{xy}$$

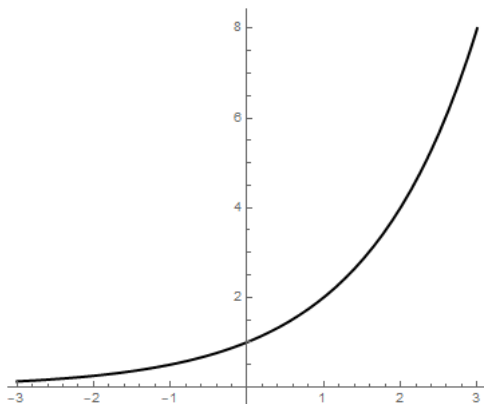
$$a^{-x} = \frac{1}{a^x}$$

$$\frac{a^x}{a^y} = a^{x-y}$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^x = \frac{a^x}{b^x}$$

## Grafici elementarnih funkcija

- Primer:  $a = 2 > 1$ ,  $f(x) = 2^x$



## Grafici elementarnih funkcija

- Primer:  $a = 1/2 = 0.5 < 1$ ,  $f(x) = 0.5^x$

